TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 356, Number 6, Pages 2139–2147
S 0002-9947(04)03159-9
Article electronically published on February 2, 2004

SUR LES TRANSFORMÉES DE RIESZ DANS LE CAS DU LAPLACIEN AVEC DRIFT

NOËL LOHOUÉ AND SAMI MUSTAPHA

Abstract. We prove L^p estimates for Riesz transforms with drift.

I. Introduction

La bornitude des transformées de Riesz $\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta^{-1/2}$, $1 \leq j \leq n$, sur les espaces L^p, $1 < p < \infty$, dans $\mathbb{R}^n$ a été étendue, grâce à la théorie des intégrales singulières dans les espaces de type homogène (cf. [4]) à d'autres contextes où le volume des boules croît d'une manière polynomiale (ex. variétés à courbure positive, groupes de Lie à croîssance polynomiale, groupes discrets nilpotents, etc.; cf. [1], [2]). Dès que l'on se trouve en présence d'une croîssance superpolynomiale du volume l'étude de la bornitude des transformées de Riesz devient problématique. L'investigation de ce type de situations a fait l'objet de plusieurs travaux de la part du premier auteur (cf. par exemple [7] pour les groupes de Lie non moyennables et [8] pour les variétés Riemanniennes à courbure minorée). D'autres résultats ont été obtenus récemment pour les groupes de Lie moyennables non-unimodulaires et pour certains espaces homogènes avec une croissance du volume exponentielle (cf. [9]).

Il existe néanmoins un contexte élémentaire où le problème de Riesz se pose d'une manière naturelle en présence d'un volume exponentiel. En effet, en se plaçant dans l'espace euclidean $\mathbb{R}^n$ et en ajoutant au Laplacien standard un "Drift" on obtient un opérateur qui est auto-adjoint pour une mesure pour laquelle la croissance du volume des boules est exponentielle. L'investigation de la bornitude des transformées de Riesz sur les espaces L^p correspondant à cette mesure ne peut plus se faire via la théorie de Calderon-Zygmund.

Nous étudions ci-dessous ce problème. La méthode que nous utilisons, qui est basée sur l'utilisation du noyau de la chaleur, se généralise très naturellement dans le contexte des sous-Laplaciens sur les groupes de Lie moyennables. Elle permet d'obtenir dans ce contexte un certain nombre de résultats concernant la bornitude des transformées de Riesz pour des sous-Laplaciens avec Drift. Nous illustrons ces résultats à travers l'exemple du groupe de Heisenberg et de certains groupes résolubles de rang 1.

Received by the editors October 30, 1998.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 58Jxx, 43-XX; Secondary 35Jxx, 35Kxx.
Key words and phrases. Riesz transforms, drift, Lie groups, convolution.

II. Enoncé de résultats

Considérons dans $\mathbb{R}^n$ l'opérateur $L = \Delta + X$ où Δ est le Laplacien sandard et où X est un "Drift" donné par $X = \sum_{i=1}^{x} c_j \partial_{x_j}$, $c_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$. Notons $\varphi(x) = \exp[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j x_j]$ et $\lambda = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} c_j^2$. Nous supposerons dans toute la suite que $\lambda \neq 0$ (i.e. qu'il existe réellement un Drift dans l'opérateur L). On vérifie (cf. §III, ci-dessous) que l'opérateur L est auto-adjoint sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2}\,dx)$, où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et que

$$\inf\{\langle Lf, f\rangle, \|f\|_{L^2(\varphi^{-2}\,dx)} = 1\} = \lambda,$$

où $\langle \cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\varphi^{-2}\,dx)$. Soit $0 \leq \theta \leq 1$, posons $\mathcal{L}_\theta = L - \theta\lambda$. Soit $\mathcal{L}_\theta = \int_{(1-\theta)\lambda}^{\infty} \mu dE_\mu$ la décomposition spectrale de $\mathcal{L}_\theta$ (cf. [13]). Notons $\mathcal{L}_\theta^{-k/2} = \int_{(1-\theta\lambda)}^{\infty} \mu^{-k/2}\,dE_\mu$, $k = 1, 2, \ldots$. Alors:

Théorème 1. *Les notations étant comme ci-dessus, on a:*

(i) *Soit $0 < \theta < 1$. Alors pour tout p vérifiant*

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-\theta}} < p < \frac{2}{1-\sqrt{1-\theta}},$$

pour tout $k = 1, 2, \ldots$ et pour tout $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$ la transformée de Riesz multiple $\partial_{x_{i_k}} \cdots \partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_k}} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est bornée de $L^p(\varphi^{-2}\,dx)$ dans $L^p(\varphi^{-2}\,dx)$. De plus si les coefficients c_{i_k} sont tous non nuls et si $p \leq 2/(1+\sqrt{1-\theta})$ ou $p \geq 2/(1-\sqrt{1-\theta})$ alors $\partial_{x_{i_k}} \cdots \partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_k}} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est non bornée de $L^p(\varphi^{-2}\,dx)$ dans $L^p(\varphi^{-2}\,dx)$.

(ii) *Si $\theta = 0$ alors pour tout $k = 1, 2, \ldots$ et pour tout $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$ l'opérateur $\partial_{x_{i_k}} \cdots \partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_k}} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est borné sur $L^p(\varphi^{-2}\,dx)$ pour tout $1 < p < \infty$.*

(iii) *Si $\theta = 1$ et si les coefficients c_{i_k} sont tous non nuls $\partial_{x_{i_k}} \cdots \partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_k}} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est non borné sur $L^p(\varphi^{-2}\,dx)$, $\forall 1 < p < \infty$.*

Le théorème ci-dessus se généralise très naturellement dans le contexte des groupes de Lie. Soit G un groupe de Lie connexe moyennable et soient $X_1, \ldots, X_n$ des champs de vecteurs invariants à gauche sur G vérifiant la condition de Hörmander (cf. [12]). Soit $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-Laplacien qui leur correspond. Soit L l'opérateur défini par:

$$L = \Delta + \sum_{j=1}^{n} c_j X_j = -\sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

où les cofficients $c_j \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous nuls. On fait l'hypothèse suivante:

$$\text{(H)} \qquad \begin{cases} \text{Il existe un caractère } \chi \text{ sur } G \text{ et il existe } \lambda > 0 \text{ telle que} \\ L = \chi(\Delta + \lambda)\chi^{-1}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que si un tel caractère existe, alors nécessairement

$$X_j(\chi) = \frac{cj}{2}\chi, \quad 1 \leq j \leq n,$$

et

$$\lambda = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} c_j^2.$$

On vérifie alors que l'opérateur L est auto-adjoint sur $L^2(\chi^{-2}d^rg)$ où d^rg est la mesure de Haar invariante à droite sur G et que

$$\inf\left\{\int Lf\cdot f\chi^{-2}\,d^rg,\ \|f\|_{L^2(\varphi^{-2}d^rg)}=1\right\}=\lambda.$$

On note, comme ci-dessus, pour $0\leq\theta\leq 1$, $\mathcal{L}_\theta=L-\theta\lambda$ et on considère $\mathcal{L}_\theta^{-k/2}=\int_{(1-\theta\lambda)}^{\infty}\mu^{-k/2}\,dE_\mu$, $k=1,2,\ldots$, où $\mathcal{L}_\theta=\int_{(1-\theta)\lambda}^{\infty}\mu dE_\mu$ est la décomposition spectrale de $\mathcal{L}_\theta$.

Théorème 2. *Soit G un groupe de Lie connexe moyennable et soit $L=\Delta+X$ comme ci-dessus. Supposons l'hypothèse* (H) *vérifiée. Alors*

(i) *Soit $0<\theta<1$. Alors pour tout p vérifiant*

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-\theta}}<p<\frac{2}{1-\sqrt{1-\theta}},$$

pour tout $k=1,2,\ldots$ et pour tout $1\leq i_1,i_2,\ldots,i_k\leq n$ la transformée de Riesz multiple $X_{i_1}\ldots X_{i_k}\mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est bornée de $L^p(G,\chi^{-2}d^rg)$ dans $L^p(G,\chi^{-2}d^rg)$. De plus si les coefficients c_{i_k} sont tous non nuls et si $p\leq 2/(1+\sqrt{1-\theta})$ ou $p\geq 2/(1-\sqrt{1-\theta})X_{i_1}\ldots X_{i_k}\mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est non bornée de $L^p(G,\chi^{-2}d^rg)$ dans $L^p(\chi^{-2}d^rg)$.

(ii) *Si $\theta=0$ alors pour tout $k=1,2,\ldots$ et pour tout $1\leq i_1,i_2,\ldots,i_k\leq n$ l'opérateur $X_{i_1}\ldots X_{i_k}\mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est borné sur $L^p(G,\chi^{-2}d^rg)$ pour tout $1<p<\infty$.*

(iii) *Si $\theta=1$ et si les coefficients c_{i_k} sont tous non nuls $X_{i_1}\ldots X_{i_k}\mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est non borné sur $L^p(G,\chi^{-2}d^rg)$, $\forall 1<p<\infty$.*

III. Preuve des théorèmes

III. 1. Dans $\mathbb{R}^n$ l'opérateur $L=-\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+c_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+c_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ définit bien un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n,\varphi^{-2}\,dx)$. En effet, les notations étant les mêmes que dans §II, on a:

$$\varphi\Delta(\varphi^{-1}f)=-\left(\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n c_j^2\right)f+Xf+\Delta f.$$

D'où l'on déduit la relation de conjugaison

$$Lf=\varphi(\Delta+\lambda)\varphi^{-1}f. \tag{1}$$

Ce qui montre que l'opérateur L est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n,\varphi^{-2}\,dx)$. On déduit aussi de (1) que

$$(Lf,f)_{L^2(\mathbb{R}^n,\varphi^{-2}\,dx)}\geq\lambda\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\varphi^{-2}\,dx)}.$$

On a aussi

$$\mathcal{L}_\theta f=\varphi(\Delta+(1-\theta)\lambda)\varphi^{-1}f$$

et par conséquent l'opérateur $\mathcal{L}_\theta$ vérifie

$$(\mathcal{L}_\theta f,f)_{L^2(\mathbb{R}^n,\varphi^{-2}\,dx)}\geq(1-\theta)\lambda\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\varphi^{-2}\,dx)}.$$

Dans le cas général d'un groupe de Lie muni d'un sous-Laplacien avec "Drift" vérifiant l'hypothèse (H) on a la relation de conjugaison

$$\mathcal{L}_\theta f=\chi(\Delta+(1-\theta)\lambda)\chi^{-1}f. \tag{2}$$

III. 2. Nous aurons besoin des deux ingrédients suivants:

Lemme 1. *Soit G un groupe de Lie connexe. Soit χ un caractère sur G et X un champ de vecteurs invariant à gauche tel que $X(\chi) \not\equiv 0$. Soit $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe $C > 0$*

$$\int |f(x)|^p \chi(x) d^r x \leq C \int |Xf(x)|^p \chi(x) d^r x, \qquad f \in C_0^\infty(G),$$

où $d^r x$ est la mesure de Haar invariante à droite sur G.

Lemme 2. *Soit G un groupe de Lie connexe moyennable et $\Delta = -\sum X_j^2$ un sous-Laplacien invariant à gauche sur G et soit χ un caractère sur G tel que $\Delta(\chi) = \lambda_\chi$. Alors*

$$\begin{aligned} &\| \exp(-t\chi(L + (1-\theta)\lambda)\chi^{-1})\|_{L^p(G,\chi^{-2}d^r x) \to L^p(G,\chi^{-2}d^r x)} \\ &\qquad = \exp\left(\left[\left(1 - \frac{2}{p}\right)^2 - (1-\theta)\right]\lambda t\right). \end{aligned}$$

La preuve du Lemme 1 est une adaptation facile de la proposition IX.2.1 de [12]. Pour la preuve du Lemme 2, notons T_t le semi-groupe engendré par Δ et ϕ_t son noyau, i.e. le noyau donné par (cf. [12])

$$T_t f(x) = \int \phi_t(y^{-1}x) f(y) dy, \qquad f \in C_0^\infty(G).$$

Alors

$$\begin{aligned} \exp(-t\chi(L + (1-\theta)\lambda)\chi^{-1}) f(x) &= \exp(-(1-\theta)\lambda t)\chi T_t \chi^{-1} f(x) \\ &= \exp(-(1-\theta)\lambda t) \int (\chi\phi_t)(y^{-1}x) f(y)\, dy \\ &= \exp(-(1-\theta)\lambda t) f * (\chi\phi_t(g) d^r g). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\| \exp(-t\chi(L + (1-\theta)\lambda)\chi^{-1})\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x) \to L^p(\chi^{-2}d^r x)} \\ &\qquad = \exp(-(1-\theta)\lambda t) \sup_{f \neq 0} \frac{\|\chi^{-2/p}[f * \chi\phi_t d^r g]\|_{L^p(G,d^r g)}}{\|f\|_{L^p(G,d^r g)}} \\ &\qquad = \exp(-(1-\theta)\lambda t) \sup_{f \neq 0} \frac{\|(\chi^{-2/p} f) * (\chi^{-2/p+1}\phi_t d^r g)\|_{L^p(G,d^r g)}}{\|f\|_{L^p(G,d^r g)}} \\ &\qquad = \exp(-(1-\theta)\lambda t) \int \chi^{-2/p+1}(g)\phi_t(g) d^r g, \end{aligned}$$

du fait de la moyennabilité de G (cf. [10]). D'où en effectuant le changement de variable $g \longleftrightarrow g^{-1}$

$$\begin{aligned}
&\| \exp(-t\chi(L + (1-\theta)\lambda)\chi^{-1})\|_{L^p(\chi^{-2}d^rx)\to L^p(\chi^{-2}d^rx)} \\
&\quad = \exp(-(1-\theta)\lambda t)\int \chi^{2/p-1}(g)\phi_t(g^{-1})\,dg \\
&\quad = \exp(-(1-\theta)\lambda t)T_t(\chi^{2/p-1})(e) \\
&\quad = \exp(-(1-\theta)\lambda t)\exp\left(t\left(\frac{2}{p}-1\right)^2\lambda\right) \\
&\quad = \exp\left(\left[\left(\frac{2}{p}-1\right)^2 - (1-\theta)\right]\lambda t\right).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 2.

III. 3. Maintenant notons $T_t^\theta = \exp(-t\mathcal{L}_\theta)$, $t > 0$, le semi-groupe engendré par $\mathcal{L}_\theta$. On alors (cf. [6])

$$\mathcal{L}_\theta^{-k/2} = c\int_0^\infty t^{k/2}T_t^\theta \frac{dt}{t}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

où $c = \Gamma(k/2)^{-1}$. La transformée de Riesz multiple $\mathcal{R}_k^\theta = X_{i_1}\ldots X_{i_k}\mathcal{L}_\theta^{-k/2}$, $1 \le i_1, \ldots, i_k \le n$, que nous noterons $\mathcal{R}_k^\theta = X_1 \cdots X_k\mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ afin d'alléger les notations, peut être décomposée de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_k^\theta &= c\int_0^1 t^{k/2}X_1\ldots X_kT_t^\theta\frac{dt}{t} + c\int_1^\infty t^{k/2}X_1\ldots X_kT_t^\theta\frac{dt}{t} \\
&= \mathcal{R}_{k,0}^\theta + \mathcal{R}_{k,\infty}^\theta,
\end{aligned}$$

et si on note $\phi_t^\theta(\cdot)$ le noyau associé à T_t^θ, on a, par le principe de Harnack local parabolique (cf. [12])

$$|X_1\ldots X_k\phi_t^\theta(g)| \le C\phi_{t+1}^\theta(g), \qquad t \ge 1,\ g \in G.$$

D'où

$$\|\mathcal{R}_{k,\infty}^\theta\|_{L^p(\chi^{-2}d^rx)\longrightarrow L^p(\chi^{-2}d^rx)} \le C\int_1^\infty t^{k/2-1}\|T_t^\theta\|_{L^p(\chi^{-2}d^rx)\longrightarrow L^p(\chi^{-2}d^rx)}\,dt.$$

En utilisant la relation de conjugaison (2) et le lemme 2 déduit alors que

$$\|\mathcal{R}_{k,\infty}^\theta\|_{L^p(\chi^{-2}d^rx)\longrightarrow L^p(\chi^{-2}d^rx)} < \infty$$

dès que $(1-2/p)^2 - (1-\theta) < 0$, i.e., dès que

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-\theta}} < p < \frac{2}{1-\sqrt{1+\theta}}$$

dans le cas où $0 < \theta < 1$, et dès que $p > 1$ dans le cas où $\theta = 0$.

III. 4. La partie locale $\mathcal{R}^{\theta}_{k,0}$ est bornée sur $L^p(\chi^{-2}d^r x)$ pour tout $1 < p < \infty$. En effet, soit $A > 0$, écrivons

$$\begin{aligned}
R_0 &= c\int_0^1 t^{k/2-1} X_1 \dots X_k \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI))\,dt \\
&\quad + c\int_0^1 t^{k/2-1} X_1 \dots X_k(\exp(-t\mathcal{L}_\theta) - \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI)))\,dt \\
&= c\int_0^\infty t^{k/2-1} X_1 \dots X_k \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI))\,dt \\
&\quad - c\int_1^\infty t^{k/2-1} X_1 \dots X_k \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI))\,dt \\
&\quad + c\int_0^1 t^{k/2-1} X_1 \dots X_k((\exp(-t\mathcal{L}_\theta) - \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI)))\,dt \\
&= -c\int_1^\infty t^{k/2-1} X_1 \dots X_k \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI))\,dt \\
&\quad + X_1 \dots X_k(\mathcal{L}_\theta + AI)^{-k/2} \\
&\quad + c\int_0^1 t^{k/2-1} X_1 \dots X_k(\exp(-t\mathcal{L}_\theta)\exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI)))\,dt \\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

La bornitude de l'opérateur I résulte du principe de Harnack parabolique (qui permet d'estimer le noyau $|X_1 \dots X_k \phi^\theta_t(\cdot)|$ par $\phi^\theta_{t+1}(\cdot)$, $t > 1$) et de la présence du facteur $\exp(-At)$ qui permet pour un A assez grand d'absorber la croîssance exponentielle de la norme $\|T^\theta_t\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x) \longrightarrow L^p(\chi^{-2}d^r x)}$ et de faire converger l'intégrale. La bornitude de la transformée de Riesz $II = X_1 \dots X_k(AI + \Delta)^{-k/2}$, pour A est assez grand, découle de faits bien connus (cf. [7], [11]). Enfin le noyau de $X_1 \dots X_k((\exp -t(\mathcal{L}_\theta) - \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI))$ est donné par

$$(1 - e^{-At})X_1 \dots X_k \phi^\theta_t \sim t X_1 \dots X_k \phi^\theta_t \tag{3}$$

et par le Théorème V.4.2 de [12], il existe $C > 0$ et $c > 0$ telles que

$$|X_1 \dots X_k \phi^\theta_t(g)| \le C t^{-k/2} \phi^\theta_{ct}(g), \quad \forall g \in G,\ \forall 0 < t < 1. \tag{4}$$

En utilisant (3) et (4) on déduit facilement la bornitude de III.

III. 5. Supposons maintenant que les champs X_j sont tels que $X_j(\chi) \not\equiv 0$ (i.e. $c_j \neq 0$ avec les notations du §II). Alors, si $\theta \neq 0$ et si $p \ge 2/(1 - \sqrt{1-\theta})$ ou $p \le 2/(1 + \sqrt{1-\theta})$ la bornitude de la transformée de Riesz $\mathcal{R}^\theta_k$ entraînerait l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|\mathcal{R}^\theta_k f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)} = \|X_1 \dots X_k \mathcal{L}_\theta^{-k/2} f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)} \le C\|f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)}. \tag{5}$$

Mais, par le lemme 1, l'estimation (5) implique que

$$\|X_1 \dots X_k f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)} \le \|f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)} \le \|\mathcal{L}_\theta^{k/2} f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)}$$

et donc que

$$\mathcal{L}_\theta^{-k/2} = c\int_0^\infty t^{k/2-1} T^\theta_t\,dt : L^p(G, \chi^{-2}d^r x) \longrightarrow L^p(G, \chi^{-2}d^r x),$$

ce qui est incompatible avec le fait que

$$\|T_t^\theta\|_{L^p(G,\chi^{-2}d^rx)\longrightarrow L^p(G,\chi^{-2}d^rx)} = \exp\left(\left[\left(\frac{2}{p}-1\right)^2-(1-\theta)\right]\lambda t\right) \geq 1,$$

pour tout $t > 0$ dès que $p \geq 2/(1-\sqrt{1-\theta})$ ou $p \leq 2/(1+\sqrt{1-\theta})$.

III. 6. La première partie de l'assertion (i) du théorème 2 et l'assertion (ii) résultent immédiatement de (III.3) et (III.4). La deuxième partie de l'assertion (i) et l'assertion (iii) résultent de (III.5).

IV. Exemples

Le cas du groupe de Heisenberg $\mathbf{H}_n$. Considérons dans $\mathbf{H}_n$—le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$—les champs de vecteurs invariants à gauche définis par

$$\begin{aligned} X_j =& \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}y_j\frac{\partial}{\partial u}, \\ Y_j =& \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2}x_j\frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

$1 \leq j \leq n$, les coordonnées sur $\mathbf{H}_n$ étant données par $(x, y, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Soit L le sous-Laplacien avec Drift défini par

$$L = -\left(\sum_{j=1}^n X_j^2 + Y_j^2\right) + \sum_{j=1}^n a_jX_j + b_jY_j$$

où a_j, $b_j \in \mathbf{R}$. Il est facile de voir que l'opérateur L vérifie l'hypothèse (H) sur $\mathbf{H}_n$ pour le caractère χ définit par

$$\chi(g) = \chi(x,y,u) = \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n(a_jx_j+b_jy_j)\right], \qquad g = (x,y,u) \in \mathbf{H}_n,$$

et

$$\lambda = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^n(a_j^2+b_j^2).$$

Le cas des groupes NA. Il s'agit d'une classe de groupes résolubles non-unimodulaires généralisant les groupes NA associés aux espaces symétriques de rang 1 (cf. [5]). Rappelons que si $\mathcal{N}$ est une algèbre de Lie réele nilpotente de rang 2 munie d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et si $\mathcal{Z}$ est son centre et $\mathcal{B} = \mathcal{Z}^\perp$ alors $\mathcal{N}$ est dite de type (H) si pour tout $X \in \mathcal{B}$ tel que $|X| = 1$, $\mathrm{ad}(X)$ est une isométrie surjective de $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X))^\perp \longrightarrow \mathcal{Z}$. Notons N le groupe de Lie simplement connexe correspondant à $\mathcal{N}$. L'application exponentielle permet de paramétrer les éléments de $N = \exp(\mathcal{N})$ par $(X, Z) \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{Z}$ de sorte que

$$(X,Z)(X',Z') = (X+X', Z+Z'+1/2[X,X']).$$

On note $m = \dim(\mathcal{B})$, $k = \dim(\mathcal{Z})$ et $Q = m/2 + k$ la dimension homogène de N. Posons $A = \mathbb{R}^+$ et considérons l'action de A sur N définie par: $(X, Z) \longrightarrow$

$(a^{1/2}X, aZ)$, $a \in A$. On note S le produit semi-direct NA associé à cette action. S est une extension résoluble de N. Le produit de deux éléments de S est donné par

$$(X, Z, a)(X', Z', a') = (X + a^{1/2}X', Z + aZ' + 1/2a^{1/2}[X, X'], aa'),$$

pour tout (X, Z, a), $(X', Z', a') \in S$. Sur $\mathcal{S} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathbb{R}$ (l'algèbre de Lie de S) on considère le produit scalaire

$$((X, Z, t)|(X', Z', t')) = (X|X') + (Z|Z') + tt'.$$

La mesure de Haar invariante à gauche (resp.: à droite) sur S est donnée par $d^l x = dx = a^{-Q-1}\, dX\, dZ\, da$ (resp.: $d^r x = a^{-1}\, dX\, dZ\, da$). Le groupe S est non unimodulaire et la fonction module δ est donnée par $\delta(X, Z, a) = d^l x / d^r x = a^{-Q}$.

Soient $e_1, \ldots, e_m \in \mathcal{B}$, $e_{m+1}, \ldots, e_{m+k} \in \mathcal{Z}$, $e_0 \in \mathbb{R}$ formant une base orthonormée de $\mathcal{S} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathbb{R}$. On note X_j, $j = 0, \ldots, m + k$, les champs de vecteurs invariants à gauche définis par les vecteurs e_j et L l'opérateur défini par

$$L = \Delta + \alpha X_0 = -(X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_{m+k}^2) + \alpha X_0 \tag{6}$$

où $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

En utilisant le fait que les champs $X_1, \ldots, X_{m+k}$ ne contiennent pas de dérivation en a et que $X_0 = a\partial_a$ (cf. [5]) on voit facilement que l'opérateur L défini par (6) vérifie l'hypothèse (H) sur le groupe S avec $\chi = a^{\alpha/2}$ et $\lambda = \alpha^2/4$.

Remarquons que si $\alpha = Q$, alors L coincide, au signe près, avec l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique riemannienne invariante à gauche induite par le produit scalaire sur $\mathcal{S}$ et l'espace $L^p(S, a^{-\alpha} d^r g) = L^p(S, a^{-Q} d^r g) = L^p(S, d^l g)$ est l'espace de Lebesgue associé à la mesure de Haar invariante à gauche sur S. Let résultat (ii) du théorème 2 est dans ce cas contenu dans [3].

References

[1] G. Alexopoulos, *An application of homogenization theory to harmonic analysis: Harnack inequalities and Riesz transforms on Lie groups of polynomial growth*, Canad. J. Math. **44** (1992), 691–727. MR **93j:**22006

[2] G. Alexopoulos, *Puissances de convolution sur les groupes à croissance polynomiale du volume*, C. R. Acad. Sci. Série I **324** (1997), 771–776. MR **98a:**43001

[3] J.-P. Anker, E. Damek, C. Yacoub, *Spherical analysis on harmonic AN groups*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **23** (1996), 643–679. MR **99a:**22014

[4] R. R. Coifman et G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math., vol. 242, Springer-Verlag, 1971. MR **58:**17690

[5] E. Damek et F. Ricci, *Harmonic analysis on solvable extensions of H-type groups*, J. Geom. Anal. **3** (1992), 213–248. MR **93d:**43006

[6] B. M. Davies, *One-parameter semigroups*, Academic Press, 1980. MR **82i:**47060

[7] N. Lohoué, *Transformées de Riesz et fonctions de Littlewood Paley sur les groupes non moyennables*, C. R. Acad. Sci. Série I **306** (1988), 327–330. MR **89b:**43008

[8] N. Lohoué, *Transformées de Riesz et fonctions sommables*, Amer. J. Math. **114** (1992), 875–992. MR **93k:**58214

[9] N. Lohoué et S. Mustapha, *Sur les transformées de Riesz sur les groupes de Lie moyennables et sur certains espaces homogènes*, Canad. J. Math. **50** (1998), 1090–1104. MR **2000a:**43008

[10] H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, Oxford Math. Monograph, 1968. MR **46:**5933

[11] D. W. Robinson, *Elliptic Operators and Lie Groups*, Clarendon Press, Oxford, New York, Tokyo, 1991. MR **92m:**58133

[12] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste et Th. Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge Tracts in Math., 100, 1993. MR **95f:**43008

[13] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1978. MR **58:**17765

Departement de Mathématiques, Bât. 425, Université Paris XI, 91405, Orsay Cedex, France

Institut de Mathématiques, Université Paris VI, 4, Place Jussieu, 75252, Paris Cedex, France